

УДК 004.04:534.1

Безверха М. А.

### КОМП'ЮТЕРНА СИСТЕМА ДЛЯ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ПРУЖНИХ ТІЛАХ

Розробка чисельно-аналітичних методів розв'язування нестационарних задач теорії пружності та в'язкопружності, а також комп'ютерних систем на їх основі має велике значення, як для дослідження різноманітних змінних у часі явищ у твердих деформівних тілах, так і для розрахунків на міцність та жорсткість конструкцій різного призначення, на які діють динамічні навантаження. Прикладами таких конструкцій є підземні та підводні тунелі, дорожні покриття, захисні оболонки атомних станцій та промислових споруд, корпуси суден, літаків чи ракет. У переважній більшості джерел, присвячених розв'язку динамічних задач пружності та в'язкопружності використані або аналітичні методи, або наближені чисельні методи. Значний внесок у розвиток динамічної теорії пружності внесли у XIX столітті Пуассон, Стокс, Релей, а також Ляв, ідеї яких розвинули у XX столітті С. П. Тимошенко, Стоунлі, В. І. Смирнов, С. Л. Соболев та інші дослідники. Розв'язанням динамічних задач теорії пружності для неперервних та шаруватих тіл у різні часи займалися такі вчені як А. Г. Горшков, В. І. Пожуєв [1], Л. Айнола та У. Нігул, Б. А. Корбут та Ю. І. Нагорний, Ю. А. Шевляков, А. К. Приварников, О. М. Гузь, В. І. Гуляєв, І. Т. Селезов, І. К. Сенченков, Ю. В. Мастиновський, О. Д. Шамровський та ін. Більшість задач розглянуті у стаціонарній або квазістаціонарній постановках. Нестационарна постановка динамічних задач теорії пружності, як правило, супроводжувалась різноманітними спрощеннями, що зумовлено складністю розв'язку таких задач. Моделі, що враховують реологічні властивості матеріалів, зокрема в'язкопружність та повзучість, були розроблені Максвеллом, Фойгтом, Кельвіном, Вольтерра та іншими авторами. На початку сучасної теорії в'язкопружності стоїть видатний вчений Ю. М. Работнов. У подальшому цим проблемам присвятили свої роботи О. А. Ілюшин, Б. Ю. Победря [2], Г. М. Савін та Я. Я. Руцицький, В. Г. Карнаухов, В. І. Козлов [3]. У більшості робіт розглянуто статичні та стаціонарні задачі або задачі про дисипативний розігрів. Із загальної кількості проблем сучасної динамічної теорії пружності в результаті аналізу у роботі виділена проблема розвитку чисельних методів для розв'язування задач про поширення нестационарних збурень у шаруватих тілах з пружними та в'язкопружними властивостями.

Робота присвячена розробці та розвитку поєднання аналітичних та чисельних методів для розв'язання динамічних задач деформівного твердого тіла. Дослідження проведені згідно з планами науково-дослідних робіт Запорізької державної інженерної академії.

Метою роботи є розробка комплексу програм для чисельного аналізу деформування кусково-однорідних пружних і в'язкопружних шаруватих тіл при динамічних навантаженнях.

Досягнення поставленої мети передбачає:

- розробку чисельно-аналітичного підходу для розв'язання нестационарних задач теорії пружності за допомогою інтегральних перетворень Лапласа за часом й Фур'є по просторових координатах у сполученні з чисельно-аналітичними методами їх обернення;
- розвиток і вдосконалення методів чисельного обернення інтегрального перетворення Лапласа, що ґрунтується на основній теоремі про лишки;
- розробку та реалізацію чисельних методів для пошуку полюсів підінтегральних функцій на комплексній площині;
- створення комп'ютерної системи, яка реалізує запропонований метод дослідження;
- тестування методу на модельних задачах, обґрунтування його достовірності;
- співставлення результатів обчислень з результатами інших авторів;
- знаходження розв'язків одновимірних та багатовимірних задач теорії пружності для кусково-однорідних і багатошарових тіл;

- поширення розробленого чисельно-аналітичного підходу на розв’язання нестационарних задач в’язкопружності;
- виявлення й дослідження загальних закономірностей впливу наявності в’язкопружної складової на динамічні характеристики багатошарових тіл;
- аналіз закономірностей динамічних характеристик багатошарових тіл при пружних і в’язкопружних властивостях їх елементів.

Для опису задач використані відомі класичні співвідношення теорії пружності та в’язкопружності. Для їх розв’язання використані методи та положення теорії функції комплексної змінної і чисельного аналізу. Збіжність чисельних методів досліджено шляхом загальноприйнятих оцінок і чисельними експериментами.

Виконано математичну постановку нестационарних задач теорії пружності та в’язкопружності для багатошарових тіл, наведено основні фізичні, геометричні співвідношення та рівняння руху, а також початкові і граничні умови та умови сполучення між шарами. Розвинуто чисельно-аналітичний метод для розв’язання нестационарних задач теорії пружності, який відрізняється від існуючих застосуванням теореми Коші у сполученні з методами теорії лишків для чисельного обернення перетворення Лапласа.

Розглянуто багатошарове тіло, в якому шари пружні та деякі з них мають в’язкопружні властивості (рис. 1). Тіло необмежене в горизонтальному напрямі.

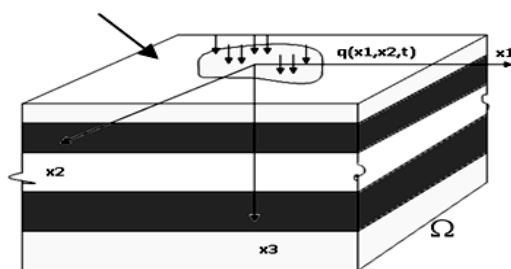


Рис. 1. Схема прикладення навантажень

Наведено рівняння руху точок багатошарового тіла:

$$\frac{\partial s_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = r^{(k)} \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

де  $i, j = 1, 2, 3$ .

Початкові умови тривіальні:

$$\begin{cases} u_i^{(k)}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u_i^{(k)}(x, 0)}{\partial t} = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} s_{ij}^{(k)} n_j = q_i \\ u_i^{(k)} = u_i^\Omega \end{cases}. \tag{3}$$

На зовнішніх поверхнях задається розподілене або зосереджене навантаження або переміщення. Умови сполучення шарів: дотичні навантаження відсутні, а нормальні напруження й переміщення співпадають, задано також співвідношення Коші.

Для пружних шарів фізичні співвідношення задані законом Гука. Для в’язкопружних шарів фізичні співвідношення представлені реологічними операторами. Застосовано інтегральні перетворення Фур’є по координатах  $x_1, x_2$ . Після цього застосовано перетворення Лапласа за часом. У загальному випадку розв’язати ці рівняння у просторі зображень досить складно.

Ще більше складностей викликає обернення одержаних розв'язків. Виникає потреба у створенні нових підходів для обернення інтегральних перетворень на основі сполучення чисельних й аналітичних методів.

Запропоновані наступні підходи, що реалізовані в комплексі програм.

1. Обернення перетворення Лапласа за допомогою основної теореми про лишки:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} u^* e^{tp} dp = \sum_{k=1}^{\infty} \text{res } u^* e^{tp_k}, \quad (4)$$

де  $p_k$  – полюси підінтегральної функції  $u^*$ .

Для визначення полюсів функції  $u^*$  знаходились корені оберненої до  $u^*$  функції, для чого запропоновані наступні методи:

- сканування комплексної площини методом вікна;
- інтегральна теорема Коші для знаходження кількості коренів у вікні та їх кратності.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz; \quad I_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^k \frac{f'}{f} dz = \sum n_j z_j^k, \quad (5)$$

де  $n_j$  – кратність  $j$ -го кореня  $z_j$ ;

- метод Ньютона (метод дотичних) для чисельного пошуку комплексних коренів:

$$z_{n+1} = z_n - f(z_n)/f'(z_n). \quad (6)$$

2. Обернення перетворення Фур'є виконано чисельним методом Файлона [1].

Указані підходи протестовані на одновимірних задачах про розповсюдження збурень у нескінченній струні при миттєвому постійно діючому та ударному навантаженнях і на більш складних задачах – про рух пружного напівпростору і пружного просторового шару під дією нестационарних навантажень, також розв'язано тестову задачу про розповсюдження збурень у пружній напівплощині під дією ударного зосередженого навантаження. Співставлення одержаних результатів з відомим розв'язком цієї задачі методом Кан'яра у модифікації де Хупа показало їх практичне співпадіння, при цьому відхилення не перевищує 5 % [5].

Після проведення тестувань методів і програм розв'язано задачу про рух пластини на пружній напівплощині, до якої миттєво прикладено розподілене навантаження. Контакт між пластиною та основою – ковзний. На рис. 2 для двох моментів часу показано переміщення поверхні пластини товщини  $h$ , що лежить на пружному напівпросторі, під дією миттєво прикладеного навантаження в прямокутній області. Проаналізовано поширення збурень поверхні пластини [6].

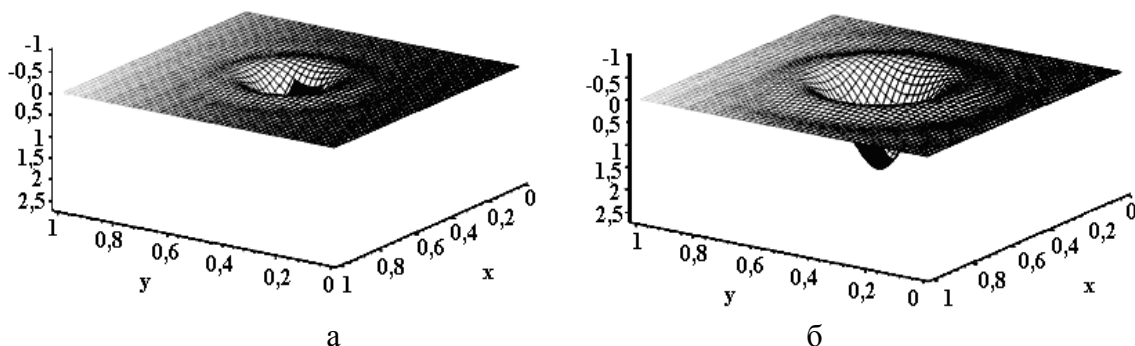


Рис. 2. Переміщення пластини на пружному напівпросторі

Розглянуто нестационарну динамічну задачу для багат шарового в'язкопружного тіла. Нестационарні навантаження прикладені на поверхні  $x_3 = 0$ , а зовнішня поверхня останнього шару – нерухома. Для опису в'язкопружного шару використано двохелементну послідовну реологічну модель Максвелла [3]. На графіках (рис. 3) показано розподіл напружень у тришаровому тілі. Видно розривні фронти, які з'являються на границях шарів, де вони розділяються і йде часткове їх відбиття. При відбитті можливе сумування напружень – вони стають у 2 рази більшими за навантаження, прикладені на границі. Слід відзначити згладжування розривних фронтів у випадку в'язкопружного заповнювача (рис. 3, а) у порівнянні з пружним заповнювачем (рис. 3, б) та значну відмінність картини розподілу напружень для однакових моментів часу.

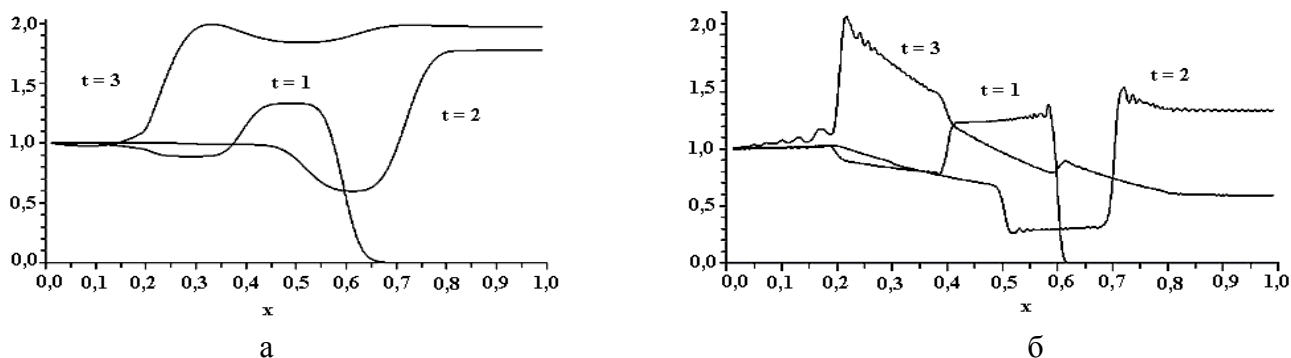


Рис. 3. Розподіл напружень у тришаровому тілі

Розглянуто поширення збурень у в'язкопружному тришаровому циліндричному тілі. Зовнішня поверхня вільна. Рівномірно розподілене навантаження прикладене миттєво до внутрішнього шару. Наприклад, це вибух у трубопроводі або захисній оболонці реактору. На рис. 4 показано вплив урахування в'язкопружної складової на переміщення у тришаровому тілі. Порівнюються переміщення тіл з пружним та в'язкопружним середнім шаром. Відмічено незначний вплив реологічних властивостей середнього шару тіла на розподіл переміщень для заданих граничних умов. Тут і далі, пунктиром показані графіки для тришарових тіл з в'язкопружним заповнювачем, а неперервною лінією – графіки для тіл із пружним заповнювачем.

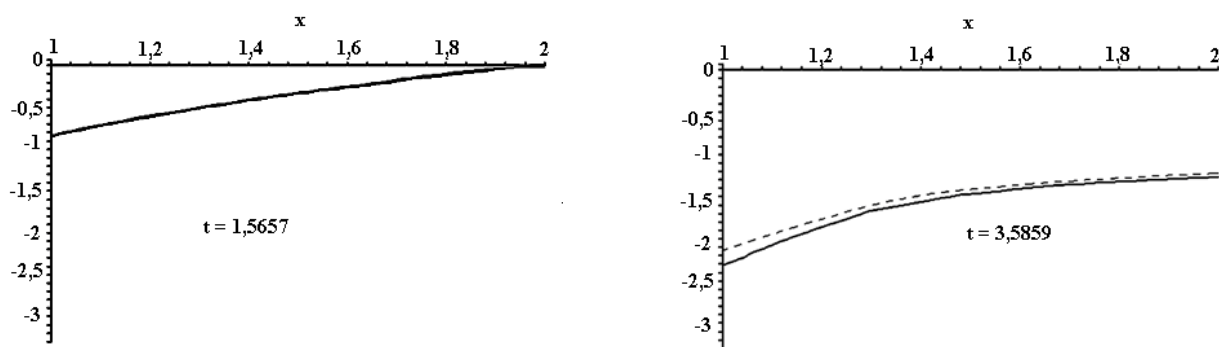


Рис. 4. Розподіл напружень у тришаровому циліндричному тілі

На рис. 5 показано для різних моментів часу розподіл напружень у пружному тілі і тілі, для якого враховано наявність в'язкопружних властивостей у середньому шарі. Спостерігається помітне згладжування розривних фронтів у тілі з в'язкопружним заповнювачем у порівнянні з напруженням у тришаровому пружному тілі.

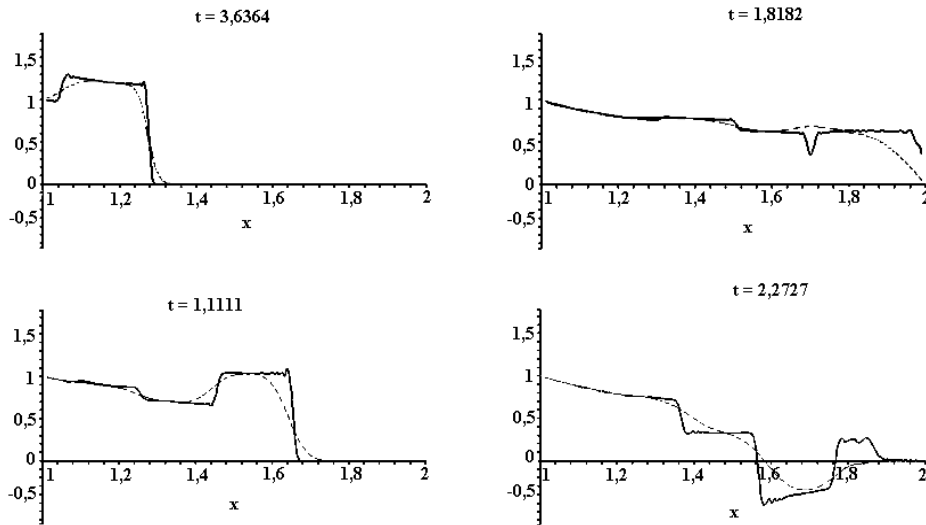


Рис. 5. Розподіл напружень у тришаровому циліндричному тілі

Розглянуто поширення збурень у в'язкопружному тришаровому сферичному тілі. Зовнішня поверхня нерухома. Рівномірно розподілене навантаження прикладене миттєво на поверхні внутрішнього шару. Спостерігається значний вплив в'язкопружності заповнювача на розподіл переміщень при нерухомому закріпленні зовнішньої границі (рис. 6).

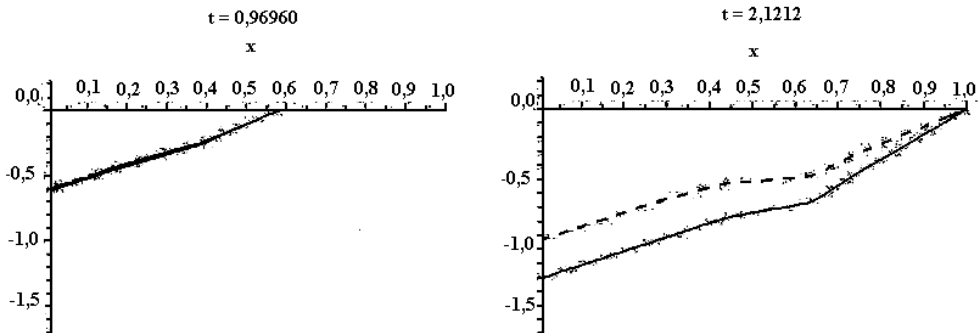


Рис. 6. Розподіл переміщень у тришаровому сферичному тілі

Спостерігається явище згладжування розривних фронтів у тілі з в'язкопружним заповнювачем у порівнянні з напруженням у пружному тілі (рис. 7).

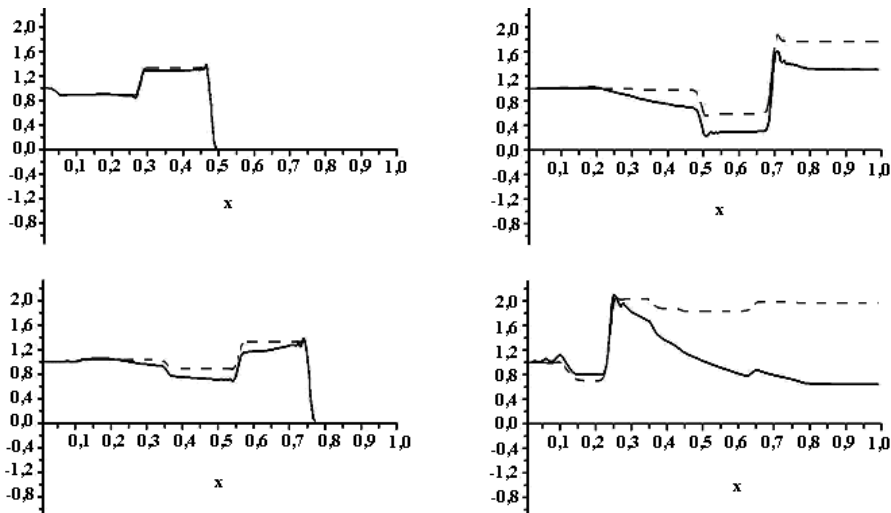


Рис. 7. Розподіл напружень у тришаровому сферичному тілі

У цілому, для циліндричних та сферичних шаруватих тіл виявлено ефект збільшення впливу в'язкопружної складової на напруження та переміщення при жорсткому закріпленні зовнішніх поверхонь у порівнянні з вільними зовнішніми поверхнями. Одержані результати можуть бути застосовані для розрахунків захисних оболонок реактора атомної станції.

### ВИСНОВКИ

1. Розроблено чисельно-аналітичний підхід до розв'язання нестационарних задач теорії пружності на основі інтегральних перетворень, який відрізняється від існуючих застосувань інтегральної теореми Коші у сполученні з методами теорії лишків для чисельного обернення перетворення Лапласа. Метод реалізовано у вигляді комплексу програм, який дозволяє формувати різні нестационарні задачі, а також здійснювати візуалізацію отриманих результатів у вигляді графіків й анімації.

2. Запропоновано чисельний метод для пошуку полюсів підінтегральних функцій на комплексній площині, що ґрунтується на сполученні застосування інтегральної теореми Коші й методу Ньютона. При цьому, пошук полюсів виконувався із застосуванням сканування комплексної площини методом вікна.

3. Методику використано для розв'язання задач про розповсюдження збурень у пружних та в'язкопружних плоских, сферичних та циліндричних шаруватих тілах, що знаходяться під дією зовнішніх нестационарних динамічних навантажень.

4. Одержано розв'язки нестационарних задач для тришарових тіл, що складаються з шарів з різними механічними властивостями та для пружних тришарових тіл з в'язкопружним середнім шаром.

5. Зроблено оцінку впливу наявності в'язкопружної складової на характер розповсюдження збурень, їх дисипацію та на демпфуючі властивості середовища, а також на величину динамічних напружень та переміщень. Виявлено, що наявність в'язкопружного заповнювача згладжує розривний характер фронтів.

6. Проаналізовано зміну нестационарних збурень на границях різнорідних шарів та при відбитті від нерухої основи, виявлено можливе значне збільшення напружень порівняно з поверхневим навантаженням.

7. Результати роботи можуть бути використані у прикладних розрахунках на міцність і жорсткість конструкцій різного призначення під дією нестационарних навантажень з метою оптимізації їх параметрів, результати роботи впроваджені на ВП Запорізька АЕС.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Горшков А. Г. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев. – М. : Машиностроение, 1992. – 224 с.
2. Победря Б. Е. Модели линейной теории вязкоупругости / Б. Е. Победря // *Механика твердого тела*. – М., 2003. – № 3. – С. 120–134.
3. Козлов В. И. Основные соотношения вязкоупругих слоистых оболочек с распределенными пьезоэлектрическими включениями для контроля нестационарных колебаний / В. И. Козлов, Т. В. Карнаухова // *Прикладная механика*. – 2002. – № 10. – С. 109–117.
4. Пожуев В. И. Розповсюдження збурень у пружному просторовому шарі / В. И. Пожуев, М. А. Безверха // *Нові матеріали і технології в металургії і машинобудуванні*. – 2005. – № 2. – С. 94–99.
5. Пожуев В. И. Рух пластини на пружному просторовому шарі / В. И. Пожуев, М. А. Безверха // *Нові матеріали і технології в металургії і машинобудуванні*. – 2006. – № 1. – С. 73–75.
6. Безверха М. А. Розповсюдження в'язкопружних хвиль у багатошаровому середовищі / М. А. Безверха // *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла : збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет*. – Дніпропетровськ, 2007. – Випуск 8. – С. 3–9.
7. Пожуев В. И. Розповсюдження в'язкопружних хвиль в тілах з неоднорідною структурою / В. И. Пожуев, М. А. Безверха // *Нові матеріали і технології в металургії і машинобудуванні*. – 2008. – № 1. – С. 83–86.